Penney's Game

Filippo Ermini
filippo.ermini@gmail.com
Università Degli studi di Firenze Facoltà di Ingegneria Informatica

Elaborato di Fisica Statistica e Teoria dell'Informazione

Aprile 2015

Sommario

Il lavoro svolto riguarda l'implementazione di un programma per lo studio e l'analisi della non transistività del "*Penney's Game*"

Indice

1 Introduzione

L'elaborato svolto riguarda l'analisi del "*Penney's Game*", un gioco basato sulla generazione di sequenze casuali che nasconde al suo interno un *paradosso non transitivo*. Lo studio è stato realizzato tramite l'implementazione di un programma che simula il gioco stesso rivelando quale è il meccanismo che sta alla base della non transitività del gioco.

2 Il Gioco di Penney

2.1 La Transitività

Quando una relazione R che si applica a xRy e a yRz vale anche per xRz, allora la relazione si dice essere transitiva. Per esempio, "minore di" è una relazione transitiva per tutti i numeri reali, se 2 è minore di π e la radice quadrata di 3 è minore di 2 allora certamente la radice quadrata di 3 sarà minore di π.
Ciò che invece non rispetta la transitività sono ad esempio relazioni del tipo: se A è il padre di B e B è il padre di C non ne consegue che A è il padre di C. Un esempio classico, che tutti conosciamo, di gioco non transitivo è il gioco da bambini *Sasso Carta Forbici* dove ogni elemento vince contro un solo elemento e perde contro un solo elemento (sasso rompe forbici, carta avvolge sasso, forbici tagliano carta), questo è un classico esempio in cui la relazione di vincita è non transitiva.
Di tanto in tanto in matematica, in particolare nella teoria della probabilità , si presenta una relazione che ci si aspetta di essere transitiva, ma in realtà non lo è. Se la non transitività è così controintuitiva da ingannare la mente, abbiamo quello che viene chiamato un "*paradosso non transitivo*": questo è proprio il caso del *Gioco di Penney*.

2.2 Il Gioco

Il gioco di Penney, dal nome del suo inventore Walter Penney, è un gioco che si svolge tra due giocatori e si basa sulla generazioni di sequenze binarie (testa / croce). All'inizio del gioco, i due giocatori concordano sulla lunghezza delle sequenze da generare. Questa lunghezza è generalmente considerata come tre, ma può essere qualsiasi numero maggiore. Il giocatore A seleziona una sequenza di testa e croce della lunghezza desiderata, e mostra questa sequenza al il giocatore B che seleziona quindi un'altra sequenza della stessa lunghezza. Successivamente, una moneta viene lanciata fino a quando la sequenza del giocatore di A o la sequenza del giocatore B appare come una sottosequenza consecutiva del lancio della moneta. Il giocatore la cui sequenza appare prima vince.

Il secondo giocatore (B) ha un vantaggio rispetto al giocatore iniziale (A). Questo perché il gioco è non transitivo, tale che per ogni sequenza si può trovare un'altra sequenza che ha una maggiore probabilità di verificarsi. Se il giocatore (B) è conoscenza del trucco le vincite, differentemente da come si potrebbe pensare non sono uniformi.

2.3 Il Trucco

Come già accennato nelle fasi precedenti il gioco di Penney nasconde un "*trucco*" che permette al giocatore B, a partire dalla sequenza scelta dal giocatore A, di trovare una sequenza che ha una maggiore probabilià di uscita. Per meglio approfondire questo aspetto sono state effettuate delle prove su sequenze binarie. A partire da una stringa binaria di lunghezza sufficientemente elevata generata in maniera casuale e dato un numero che indichi la lunghezza della sequenza considerata, si osserva, per tutte le sequenze di quella lunghezza, il tempo necessario affinchè si verifichi ognuna di esse. Per tempo si intende il numero di *shift* a destra necessari ad individuare le varie sequenze nella stringa casuale. I risultati di questo esperimento hanno mostrato l'aspetto fondamentale che sta alla base di questo fenomeno; le diverse sequenze non si verificano con tempi uniformi.

Sequenza	**Tempo di Uscita**	**Tempo di Ricorrenza**
000	12,02	8,01
001	5,98	8,00
010	8,04	8,00
011	6,02	7,94
100	5,97	8,03
101	8,05	8,04
110	6,00	7,96
111	11,98	7,99

Tabella 1: *Tabella che mostra i risultati dell'osservazione, i valori vanno intesi come tempi medi calcolati su 10000 osservazioni.*

La Tabella 1 mostra per ogni sequenza di lunghezza 3 il tempo medio di prima uscita (dopo quanti passi incontro la sequenza nella stringa casuale) e il tempo medio di ricorrenza (numero di passi dopo il quale ritrovo la stessa sequenza nella stringa casuale). Mentre il tempo medio di ricorrenza è uniforme per tutte le sequenze, non è la stessa cosa per il tempo medio di uscita, infatti come si può vedere ci sono alcune sequenze che si verificano anche il doppio dopo rispetto ad altre.

2.4 La Non Transitività

Il fatto che ci si aspetti un andamento uniforme nell'uscita delle diverse sequenze, che a conti fatti non lo è, crea il così detto "*paradosso non transitivo*".

Questo aspetto è il "*trucco* che sta alla base della non transitività del gioco. Per verificarlo sperimentalmente, per ogni vettore di tempi di uscita generato ad un osservazione, è stato contato per ogni coppia di sequenze A,B quante volte la sequenza B ha un tempo di uscita minore rispetto ad A. É stata quindi generata la matrice delle vincite relative su cui poi sono stati calcolati i valori medi.

A/B	000	001	010	011	100	101	110	111
000	-	0,4972	0,5983	0,5975	0,8731	0,5806	0,7	0,4971
001	0,5028	-	0,3293	0,3351	0,7501	0,3724	0,5034	0,2985
010	0,4017	0,6707	-	0,5052	0,5048	0,5049	0,6318	0,4187
011	0,4025	0,6649	0,4948	-	0,5004	0,4957	0,2512	0,1249
100	0,1269	0,2499	0,4952	0,4996	-	0,4963	0,6679	0,3977
101	0,4194	0,6276	0,4951	0,5043	0,5037	-	0,6726	0,4025
110	0,3	0,4966	0,3682	0,7488	0,3321	0,3274	-	0,4972
111	0,5029	0,7015	0,5813	0,8751	0,6023	0,5975	0,5028	-

Tabella 2: *Matrice delle vittorie (medie) di B contro A*

Nella tabella 2 sono mostrati i valori, medi, del rapporto di vincita della sequenza scelta dal giocatore B rispetto a quella scelta dal giocatore A. Si può notare che per ogni sequenza scelta da A, B ne può scegliere una la cui probabilità di uscita è maggiore.

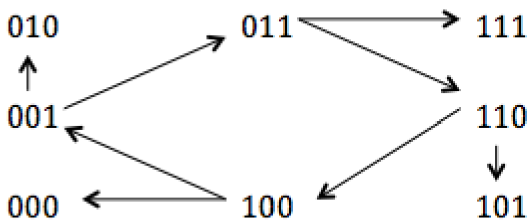

Figura 1: *Schema che mostra il rapporto tra le otto triple. Non importa quale sequenza sceglie A, c'è sempre una tripla che B può scegliere che ha probabilità maggiore di uscire prima. Le quattro triple vincenti formano un loop tra di loro che è indice di non tranisitività della relazione di vincita*

Per esempio se A sceglie la sequenza 001 e B la sequenza 100 c'è il 75% di

probabilità che la sequenza scelta di B esca prima di quella scelta di A. Un ulteriore aspetto sorprendente di questo gioco è che non è necessario memorizzare per ogni sequenza quale è quella a maggiore probabilità , perchè esiste una regola sistematica che la individua.
Data una sequenza binaria ABC la relativa sequenza vincente è data da $\overline{B}AB$. Questa regola individua sempre la sequenza a maggiore probabilità di uscita data una sequenza di partenza.
Per capire perché questo metodo funziona proviamo l'esempio in cui il giocatore A sceglie la sequenza 000 e di conseguenza il giocatore B sceglie 100, supponiamo che la sequenza 000 non si verifichi immediatamente ma nelle posizioni 5 6 e 7 della stringa binaria. Se questo è vero in posizione 4 non sarà presente uno 0 bensì un 1, altrimenti la sequenza di A si sarebbe verificata nelle posizioni 4 5 e 6. Quindi se in posizione 4 c'è un 1 e in 5 e 6 ci sono due 0, chiaramente la sequenza di B si verifica prima di quella di A.
Questa semplice regola però vale solo nel caso di sequenze di 3 bit e non è applicabile a sequenze di lunghezza arbitraria.
Nell'elaborato svolto è stata verificata questa regola simulando il gioco di Penney tra due giocatori: nella parte del giocatore A c'è un generatore di sequenze casuali di 3 bit mentre nella parte del giocatore B c'è una procedura che implementa la regola sopra esposta. Sono stati eseguiti 1000 esperimenti, con una netta vittoria del giocatore B, a conferma della non transitività del gioco di Penney.

```
985    100    110          277 - 709   100
986    010    001          277 - 710   111110110000001
987    111    011          277 - 711   11000001011
988    111    011          277 - 712   0100011
989    011    001          277 - 713   001
990    110    011          277 - 714   000100101011
991    101    110          277 - 715   11110
992    101    110          277 - 716   00110
993    001    100          278 - 716   0000001
994    101    110          278 - 717   0110
995    000    100          278 - 718   100
996    001    100          278 - 719   1110100
997    110    011          278 - 720   01011
998    000    100          278 - 721   0101100
999    101    110          278 - 722   1110
User Ratio winnings: 0.278
Computer Ratio winnings: 0.722
```

Figura 2: *Estratto della simulazione del gioco di Penney. Le colonne indicano, rispettivamente, numero della prova, sequenza dell'utente, sequenza del computer, parziale delle vittorie utente - computer, sequenza estratta.*

3 Conclusioni

L'elaborato svolto mostra come in un fenomeno apparentemente banale come il lancio di una moneta possa celarsi un problema non banale. Il fatto che ci si aspetti un comportamento uniforme, al variare delle sequenze, che invece viene del tutto stravolto a causa dell'esistenza di un paradosso non transitivo, ha reso interessante la trattazione del *Gioco di Penney*.

Riferimenti bibliografici

[1] Penney's game. http://en.wikipedia.org/wiki/Penney

[2] M. Gardner. Mathematical games - on the paradoxical situations that arise from nontransitive relations. *Scientific American*, 1974.